LA PERIODICITÉ DU HASARD

Autor(en): **Bachelier, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.11.2014**

Persistenter Link: http://dx.doi.org/10.5169/seals-16308

Nutzungsbedingungen

Mit dem Zugriff auf den vorliegenden Inhalt gelten die Nutzungsbedingungen als akzeptiert.
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die angebotenen Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungshinweisen und unter deren Einhaltung weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://retro.seals.ch

LA PERIODICITÉ DU HASARD

PAR

L. BACHELIER (Paris).

Le hasard agissant seul, d'une façon continue et uniforme produit un effet perturbateur se traduisant, comme on sait, par des écarts qui peuvent être indifféremment positifs ou négatifs et dont l'amplitude croît, dans l'ensemble, proportionnellement à la racine carrée du temps.

S'il s'agit d'épreuves discontinues, les écarts croissent, dans l'ensemble, proportionnellement à la racine carrée du nombre des épreuves.

Supposons la continuité; le hasard agissant pendant le temps t_1 produira un certain écart x. La loi de probabilité des différentes valeurs de x (en nombre infini) est bien connue.

Si le hasard continue à agir, il peut arriver que, au bout d'un certain temps t, l'écart redevienne nul.

Dans ces conditions, au bout du temps $t_1 + t$ l'écart est nul et, puisque l'on est revenu à l'état initial, ce temps $t_1 + t$ peut être considéré comme une sorte de période.

Nous pouvons nommer *période* relative au temps t_1 le temps total $t_1 + t$ au bout duquel l'écart inconnu qui se produira au temps t_1 sera revenu à zéro.

Le mot période n'a pas pas ici son sens élémentaire, mais il a l'avantage d'être très expressif et de bien correspondre à l'idée, très naturelle, d'une sorte de périodicité irrégulière dans les manifestations du hasard.

L'étude de ce que l'on pourrait nommer la périodicité for-

tuite constitue un problème très intéressant qui peut être facilement résolu en recourant à l'emploi des probabilités continues.

Sans rien ôter à la généralité du sujet, on peut lui donner une forme plus concrète en supposant qu'il s'agit d'un jeu équitable, les écarts fortuits sont alors des gains ou des pertes.

Le problème peut s'énoncer ainsi: Deux joueurs A et B joueront μ_1 parties à pile ou face. Au bout de ces μ_1 parties, il se produira un écart inconnu; l'un des joueurs aura, par exemple, gagné la somme x que l'autre joueur aura perdue.

Les joueurs continueront à jouer jusqu'à ce que l'écart soit redevenu nul ou, pour employer une expression vulgaire mais caractéristique, jusqu'à ce qu'ils soient *quitte*. On demande la probabilité pour que le jeu se termine exactement en μ nouvelles parties (il aura ainsi duré, en tout, $\mu_1 + \mu$ parties)?

Avant de résoudre le problème, il est indispensable de faire remarquer que l'on emploie, dans le calcul des probabilités, quand il s'agit d'épreuves identiques, deux sortes de formules :

1° Les formules discontinues renfermant des factorielles, elles sont analytiquement exactes, et exactes en fait quand on les applique à des problèmes admettant par hypothèse la discontinuité comme le problème du jeu de pile ou face.

2° Les formules continues, renfermant des exponentielles, elles sont mathématiquement exactes quand on admet l'hypothèse de la continuité.

Une erreur généralement accréditée consiste à croire que les formules exponentielles sont seulement approchées, elles sont absolument exactes ; ce qui n'est qu'approché est leur application à des cas où il y a discontinuité.

Les deux sortes de formules sont exactes, elles sont les solutions de deux problèmes différents qui s'identifient asymptotiquement quand le nombre des épreuves tend vers l'infini.

Dans ce qui va suivre, nous emploierons les formules continues mais en nous exprimant, pour plus de clarté, comme s'il s'agissait du jeu de pile ou face.

Pour nous conformer à l'usage, nous désignerons par la lettre μ la variable continue qui exprime une suite d'épreuves ou de parties, la lettre t n'étant employée que lorsqu'il s'agit réellement du temps.

La probabilité pour qu'il se produise un écart x en μ_1 parties, est donnée par la formule

$$\frac{2e^{-\frac{x^2}{\mu_1\varphi}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1\varphi}}dx .$$

La quantité φ est le coefficient qui caractérise le jeu, dans le cas du jeu de pile ou face, il a pour valeur deux.

Si l'écart est x au bout des μ_1 parties ; la probabilité pour qu'il revienne à zéro pour la première fois exactement au bout de μ nouvelles parties, c'est-à-dire la probabilité pour que les joueurs soient quitte au bout de μ nouvelles parties est

$$\frac{x}{\mu}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi}}\,d\mu .$$

Pour la démonstration de cette formule, on peut consulter mon traité du *Calcul des probabilités,* page 217.

La probabilité pour que l'écart soit x au bout des μ_1 premières parties et pour qu'il revienne à zéro, pour la première fois au bout de μ nouvelles parties est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{2e^{-\frac{x^2}{\mu_1\varphi}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1\varphi}}\,\frac{x}{\mu}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi}}\,d\mu\,dx .$$

La probabilité pour que, l'écart ayant été quelconque au bout des μ_1 premières parties, cet écart revienne à zéro au

bout de μ nouvelles parties est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-\frac{x^2}{\mu_1\varphi}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu_1\varphi}} \frac{x}{\mu} \frac{e^{-\frac{x^2}{\mu\varphi}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi}} d\mu\, dx = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu}} \frac{d\mu_1}{\mu + \mu_1} .$$

Cette formule, d'une extrême simplicité, exprime la probabilité cherchée.

Il est surtout intéressant de connaître la probabilité pour que l'écart soit revenu à zéro avant μ nouvelles parties (ou en μ nouvelles parties, au maximum). Cette probabilité P s'obtient en intégrant l'expression précédente entre zéro et μ.

$$(1) \qquad P = \int_0^\mu \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu + \mu_1} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} .$$

Cette formule exprime la loi de ce que l'on pourrait appeler la *périodicité fortuite*.

On en déduit un premier résultat intéressant : Si $\mu = \mu_1$, $P = \frac{1}{2}$.

Il y a donc une chance sur deux pour que l'écart qui se produira en μ_1 parties soit annihilé avant μ_1 nouvelles parties. D'une façon générale, on peut dire :

Il y a une chance sur deux pour que l'écart que produit le hasard au bout du temps t_1 *soit annihilé avant un nouvel intervalle de temps* t_1.

Le résultat précédent, exact en supposant la continuité de toutes les variables (μ_1, μ, x) est encore exact dans le cas de la discontinuité, c'est-à-dire dans le cas où il s'agit réellement du jeu de pile ou face. On le constate facilement sur des exemples simples, quand μ_1 est un petit nombre, la démonstration générale serait peut-être laborieuse.

La formule (1) fait connaître la probabilité P pour que l'écart qui s'est produit en μ_1 premières parties soit annihilé

avant μ nouvelles parties. Un exemple numérique ne sera pas inutile pour montrer que cette probabilité, qui croit d'abord très vite avec μ ne croit ensuite qu'assez lentement vers sa valeur limite un.

Cherchons la valeur de μ pour laquelle il y a 999 chances sur mille pour que l'écart soit annihilé. La formule donne $\mu = 400000\ \mu_1$.

Il faudra jouer 40 millions de parties pour avoir 999 chances sur mille de rattraper l'écart qui se produira en cent parties seulement.

On voit que la période du hasard peut être très longue, elle existe cependant car P tend vers un quand μ tend vers l'infini.

La *valeur moyenne* de la période est donnée par la formule

$$\mu_1 + \int_0^\infty \mu \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu + \mu_1}.$$

L'intégrale étant infinie, la valeur moyenne est infinie. La *valeur probable* de la période, c'est-à-dire celle qui a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassée est, comme nous l'avons vu, $2\mu_1$.

Les formules précédentes supposent la continuité, s'il y a discontinuité, c'est-à-dire s'il s'agit en réalité du jeu de pile ou face, la probabilité pour que l'écart s'annihile tend vers un quand μ tend vers l'infini, et la valeur moyenne du nombre des parties (durée moyenne du jeu) est infinie.

Pour le prouver, il suffit d'employer la méthode dont on fait usage pour démontrer que si un joueur possédant une somme donnée joue constamment à pile ou face, sa ruine est certaine et la durée moyenne de son jeu est infinie.

Revenons à la supposition de la continuité; nous avons calculé les probabilités relatives aux cas où l'écart est annihilé avant μ parties, il reste à calculer les probabilités relatives aux cas où l'écart n'est pas annihilé.

La probabilité pour que, au bout de $\mu_1 + \mu$ parties l'écart

soit z est donnée par la formule

$$\frac{4dz\, e^{-\frac{z^2}{(\mu_1+\mu)\varphi}}}{\pi\sqrt{(\mu_1+\mu)\varphi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{\frac{\mu(\mu_1+\mu)}{\mu_1}\varphi}}} e^{-\lambda^2} d\lambda .$$

Pour démontrer cette formule, il suffit d'employer un raisonnement analogue à celui qui est développé à la page 218 de mon traité du calcul des probabilités.

Si l'on intègre par rapport à z entre zéro et l'infini on obtient $1 - P$, résultat évident.

La valeur moyenne de z

$$\int_0^\infty \frac{4z\,dz\, e^{-\frac{z^2}{(\mu_1+\mu)\varphi}}}{\pi\sqrt{(\mu_1+\mu)\varphi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{\frac{\mu(\mu_1+\mu)\varphi}{\mu_1}}}} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

s'obtient facilement par une formule due à Dirichlet (ouvrage précité, p. 326) on trouve $\sqrt{\frac{\mu_1\varphi}{\pi}}$, c'est-à-dire l'écart moyen au bout des μ_1 premières parties.

Ce résultat est encore évident; la valeur moyenne de z est l'espérance mathématique d'un joueur H qui devrait toucher une somme égale à z. Son espérance, pour les μ_1 premières parties serait l'écart moyen $\sqrt{\frac{\mu_1\varphi}{\pi}}$. Son jeu devenant ensuite équitable, l'espérance pour les μ parties suivantes serait nulle; son espérance totale est donc bien $\sqrt{\frac{\mu_1\varphi}{\pi}}$.

Il est intéressant de connaître la probabilité de l'écart z relative au cas où l'écart ne s'annule pas. Pour obtenir cette probabilité, il faut multiplier la probabilité de l'écart z par la quantité $\frac{1}{1-P}$.

La valeur moyenne relative de z est donc

$$\frac{1}{1-P}\sqrt{\frac{\mu_1\varphi}{\pi}} .$$

Supposons, par exemple, que deux joueurs doivent jouer cent parties à pile ou face, l'enjeu étant Un franc par partie. Ils joueront ces cent parties puis continueront à jouer jusqu'à ce qu'ils soient quitte. Il y a une chance sur mille pour qu'ils ne soient pas quitte au bout de 40000000 parties. Dans les cas où ils ne sont pas quitte avant ce nombre de parties, l'écart moyen est 8000 francs.

Pour résumer, l'on peut dire qu'il existe une sorte de périodicité du hasard puisque l'écart qu'il produit au bout d'un certain temps arrive toujours à s'annihiler par la suite, mais la durée moyenne de cette sorte de périodicité est infinie.

COUPLE GYROSCOPIQUE [1]

PAR

F. Bouny (Mons).

Dans tous les traités de mécanique rationnelle on étudie avec plus ou moins de détail le mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Il est rare cependant que l'on examine d'une façon spéciale le phénomène, pourtant si important au point de vue des applications techniques, dénommé par les ingénieurs : *effet gyroscopique*, *effet gyrostatique*, ou *couple gyroscopique*. On se borne généralement à faire une remarque rapide sur les propriétés en apparence paradoxales du gyroscope. Il ne faut donc pas s'étonner, comme le font certains auteurs [2], de l'ignorance de beaucoup d'ingénieurs à cet endroit. D'ailleurs ceux-ci sentant la nécessité de compléter

---

[1] Les communications postales avec la Belgique étant interrompues par suite de la guerre, il nous a été impossible de soumettre à M. Bouny l'épreuve de la présente Note. — *Réd.*

[2] Bouasse. *Cours de mécanique*, p. 575 : « On ne saurait croire quelles absurdités se débitent sur le compte du gyroscope ».

Ed. W. Bogaert. *L'effet gyrostatique et ses applications*, p. 75, note.